

LIBRIS

L. PANAITOPOL

**We know
books**

M.E. PANAITOPOL

M. LASCU

INDUCȚIA MATEMATICĂ

EDITURA GIL

CUPRINS

INTRODUCERE	5
VARIANTE ALE INDUCȚIEI MATEMATICE	7
Cap 1. ENUNȚURI	11
Cap 1.1 Inducția în aritmetică	11
Cap 1.2 Inducția în algebră	14
Cap 1.3 Inducția în analiză	22
Cap 1.4 Probleme diverse	26
Cap 2. REZOLVĂRI	32
Cap 2.1 Inducția în aritmetică	32
Cap 2.2 Inducția în algebră	42
Cap 2.3 Inducția în analiză	75
Cap 2.4 Probleme diverse	98
BIBLIOGRAFIE	128

VARIANTE ALE INDUCȚIEI MATEMATICE

În acest prim capitol vom da unele variante ale inducției matematice ale căror enunțuri pot și trebuie cunoscute întrucât rezolvarea multiplelor probleme care apar în matematica școlară face apel la fiecare din aceste variante așa cum se va vedea din exemplele conținute în capitolul următor.

Fie a un număr natural; asociem fiecărui număr natural $n \geq a$, o propoziție $P(n)$.

Varianta I. Dacă

i) $P(a)$ este adevărată

ii) Implicația $P(n) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$n \geq a$ atunci $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \geq a$.

Varianta II. Dacă:

i) $P(a)$ este adevărată

ii) Implicația $P(m) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$n \geq a$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, $a \leq m \leq n$, atunci $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

Aceste două variante rezultă imediat, ținând seama că propoziția $p \rightarrow q$ este adevărată dacă p este falsă sau dacă p și q sunt adevărate.

Varianta III. Dacă:

i) $P(a); P(a+1); \dots P(a+k-1)$ sunt adevărate ($k \in \mathbb{N}$, k fixat).

ii) Implicația $P(n) \rightarrow P(n+k)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$n \geq a$ atunci $P(n)$ adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

Demonstrație: Notăm cu $Q(m)$ propoziția

$$P(a+mk) \wedge P(a+1+mk) \wedge \dots \wedge P(a+k-1+mk)$$

Vom face demonstrația folosind varianta I.

i) $Q(0) = P(a) \wedge P(a+1) \wedge \dots \wedge P(a+k-1)$ este adevărată deoarece

$P(a+1), \dots, P(a+k-1)$ sunt adevărate.

ii) Vom arăta că implicația $Q(m) \rightarrow Q(m+1)$ este adevărată oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$.

Dacă propoziția $Q(m)$ este adevărată rezultă că propozițiile

$P(a+mk), P(a+1+mk), \dots, P(a+k-1+mk)$ sunt adevărate și deci

$P(a+(m+1)k), P(a+1+(m+1)k)$,

$P(a+2+(m+1)k), \dots, P(a+k-1+(m+1)k)$ sunt adevărate, adică $Q(m+1)$ este adevărată.

Deci $Q(m)$ este adevărată oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$ și deci propozițiile

$P(a+mk), P(a+1+mk), \dots, P(a+k-1+mk)$ sunt adevărate oricare ar

fi $m \in \mathbb{N}$, adică propoziția $P(mk+r+a)$ este adevărată oricare ar fi $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Deoarece orice număr natural p se poate scrie sub forma $p = qk + r$

unde $q \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$ avem $n - a = mk + r$, adică $n = mk + r + a$,

Deci $P(n)$ adevărată oricare ar fi $n \geq a$.

Varianta IV. Dacă:

i) $P(a), P(a+1), \dots, P(a+k-1)$ sunt adevărate ($k \in \mathbb{N}$, k fixat)

ii) Implicația $P(m) \rightarrow P(n+k)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, $n \leq m \leq n+k-1$ atunci $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

Demonstrație. Punem: $Q(n) = P(n) \wedge P(n+1) \wedge \dots \wedge P(n+k-1)$,

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$. Vom face demonstrația folosind varianta I.

i) $Q(a) = P(a) \wedge P(a+1) \wedge \dots \wedge P(a+k-1)$ este evident adevărată.

ii) Dacă propoziția $Q(n)$ este adevărată rezultă că propozițiile

$P(n), P(n+1), \dots, P(n+k-1)$ sunt adevărate, adică $P(n)$ este adevărată

oricare ar fi $m \in N$, $n \leq m \leq n + k - 1$, deci $P(n+k)$ este adevărată și

deci $Q(n+1) = P(n+1) \wedge P(n+2) \wedge \dots \wedge P(n+k)$ este adevărată.

Conform variantei I, $Q(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in N$, $n \geq a$

Rezultă de aici că propoziția $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in N$, $n \geq a$, făcând parte din conjuncția care dă pe $Q(n)$.

Observații.

1°. Facând $k=1$, din varianta III se obține varianta I iar din varianta IV se obține varianta II.

Cu toate acestea, suntem de părere că variantele I și II deși sunt cazuri particulare ale variantelor III și IV, este bine să fie date separat deoarece au enunțul mai simplu și se aplică în cele mai multe cazuri.

2°. La toate variantele enunțate, prima etapă constă în verificarea propoziției pentru una sau mai multe valori particulare.

Pentru varianta I în mod obișnuit se face un raționament de tipul următor: presupunem $P(n)$ adevărată și arătăm că $P(n+1)$ este adevărată. Acest raționament pare incorect deoarece se presupune că $P(n)$ este adevărată, or adevărul acestei propoziții este scopul final al raționamentului nostru. În realitate raționamentul este corect pentru că, de fapt, se demonstrează propoziția: dacă $P(n)$ este adevărată, n arbitrar fixat, atunci și $P(n+1)$ este adevărată. Rezultă de aici că implicația $P(n) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată dacă $P(n)$ este adevărată. Implicația este de asemenea adevărată dacă $P(n)$ este falsă. Așadar implicația $P(n) \rightarrow P(n+1)$ este adevărată oricare ar fi $n \in N$, $n \geq a$, adică condiția ii) de la varianta I este îndeplinită.

Subliniem că nu este permis să formulăm demonstrația astfel: presupunem că pentru orice $n \in N$ propoziția $P(n)$ este adevărată și să arătăm că în această ipoteză este de asemenea adevărată pentru orice $n \in N$ și propoziția $P(n+1)$, pentru că în acest caz presupunerea: oricare ar fi $n \in N$, $P(n)$ este adevărată, este tocmai concluzia.

Considerații asemănătoare trebuie făcute în legătură cu toate

3°. Găsim că este necesar ca cititorilor să le fie prezentate probleme soluționate prin inducție din toate capitolele matematicii școlare pentru a sesiza diversitatea cazurilor în care este aplicabilă metoda inducției matematice.

De asemenea considerăm și probleme pentru care prima variantă nu este suficientă, ceea ce conduce la concluzia că trebuie să reținem și celelalte variante. Această observație ne-a condus la prezentarea în capitolul următor a unor probleme, pe care le credem semnificative, grupate pe domenii ale matematicii de liceu. Unele probleme sunt mai dificile, însă experiența ne-a arătat că pot fi abordate de către elevi.

Cap. 1.1. INDUCȚIA ÎN ARITMETICĂ

1). Găsiți exponentul lui 2 din produsul $(n+1)(n+2)\cdots 2n$ ($n \geq 1$).

2). Fie p un număr prim pozitiv. Atunci $(n+1)(n+2)\cdots(np)$ se divide la p^n dar nu se divide la p^{n+1} .

3). Să se arate că numărul $2^n + 1$ nu se divide cu 7 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4). Găsiți toate numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ se divide cu 7.

5). Să se arate că $2^{n^2} + 13$ se divide cu 15 dacă n este impar.

6). Să se demonstreze că $3^{2^n} \cdot 7^n - 2^{3^n} \cdot 5^n \vdots 23$.

7). Să se arate că dacă n este natural impar $11^n + 2^{n^2+1} \vdots 15$.

8). Să se arate că: $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

9). Dacă $n_k = a_k^2 + b_k^2$, $k \in \overline{1, m}$, $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ atunci

$$\prod_{k=1}^m n_k = a^2 + b^2 \text{ cu } a, b \in \mathbb{Z}$$

10). Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $2^{2^n} - 1$ are cel puțin n factori primi distincți.

11). Fie $a_n = \frac{5^{n-2} - 1}{4}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că

$$5^n = \overline{a_n 25} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

12). Dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere naturale prime, iar $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, să se arate că numărul divizorilor pozitivi ai lui n este $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)$.

13). Fie $a \in \mathbb{Z}$ și p un număr prim. Atunci $a^p - a$ se divide cu p . (mica teoremă a lui Fermat).

14). Arătați că orice număr natural par poate fi scris sub forma $(x + y)^2 + 3x + y$, unde x și y sunt numere naturale.

15). Arătați că pentru $n \geq 2$ ecuația $\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2}$ are cel puțin o soluție în numere naturale, cu $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

16). Să se arate că pentru $n \geq 6$ ecuația $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 1$ are soluții în numere naturale.

17). Pentru $n \geq 3$ ecuația $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_n^3} = \frac{1}{x_0^3}$ admite soluții în numere naturale.

18). Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ există $n \in \mathbb{N}$ și o alegere convenabilă a semnelor $+$ și $-$ astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2$ (teorema Erdos-Suranyi).

19). Să se determine numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există o alegere a semnelor $\pm$ pentru care :

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm n^2.$$

20). Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se arate că în șirul $x_n = n \cdot 2^k - 7$ există o infinitate de pătrate perfecte.

21). Un număr natural se numește „bun” dacă îl putem scrie $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ cu $a_i, i \in \overline{1, k}$ nu neapărat distincte $a_i \in \mathbb{N}^*$ și care satisface relația $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$. Știind că numerele naturale din

$\overline{33, 73}$ sunt „bune”, să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 33$ este „bun”.